

PUISSANCES ET PUISSANCES DE 10

1) Puissances de 10

a) Définitions :

Si n est un entier positif quelconque.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ fois}} = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple : $10^5 = 100\,000$.

$$10^{-n} = \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \dots \times \frac{1}{10}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{1}{10}\right)^n = \underbrace{0,00\dots01}_{n \text{ chiffres}}$$

Exemple : $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$.

b) Propriétés :

Si n et p sont des entiers relatifs, on a les formules suivantes :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \quad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p} \quad (10^n)^p = 10^{n \times p}$$

Exemples : $10^3 \times 10^{-5} = 10^{3+(-5)} = 10^{-2} = 0,01$ $\frac{10^2}{10^{-4}} = 10^{2-(-4)} = 10^{2+4} = 10^6 = 1\,000\,000$.

$$(10^3)^{-5} = 10^{3 \times (-5)} = 10^{-15}$$

c) Écritures d'un nombre décimal :

Propriété : Tout nombre décimal relatif x peut s'écrire sous la forme $x = a \times 10^n$ où a est un entier relatif et n est un entier relatif.

Exemple : $x = -15,08 = -1508 \times 10^{-2} = -15080 \times 10^{-3}$.

d) Écriture scientifique :

Propriété : Tout nombre décimal positif x peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $x = a \times 10^n$, où a est un nombre positif tel que $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

Cette écriture s'appelle l'écriture scientifique de x .

Exemple : L'écriture scientifique de $x = 281,05$ est $x = 2,8105 \times 10^2$.

2) Puissances d'un nombre quelconque :

a) Définition : Pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout nombre relatif non nul a ,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$$

$$a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{a^n}$$

Si $n = 1$, on pose par convention $a^1 = a$ et si $n = 0$, on pose par convention $a^0 = 1$.

Exemples : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ $(-5)^4 = -5 \times -5 \times -5 \times -5 = +625$

$$5^{-2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{(-2)^5} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

$$3^0 = 1 \quad (-6)^1 = -6$$

b) Propriétés : si a est un nombre relatif et si n est un entier,
 si $a \geq 0$ alors, $a^n \geq 0$
 si $a < 0$ et n est pair, alors $a^n > 0$ et si $a < 0$ et n est impair, alors $a^n < 0$.

Si a est un nombre positif, alors a^n est positif.

Si a est un nombre négatif et si n est pair, a^n est positif.

Si a est un nombre négatif et si n est impair, a^n est négatif.

Exemples : $A = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$. $a = 5$ est positif, donc $5^3 > 0$.
 $B = (-3)^4 = +3^4 = 81$. $a = -3$ est négatif, donc $(-3)^4 > 0$ car $n = 4$ est pair.
 $C = (-7)^3 = -7^3 = -343$. $a = -7$ est négatif, donc $(-7)^3 < 0$ car $n = 3$ est impair.

c) Propriétés : Pour tous nombres a et b non nuls, et pour tous entiers relatifs n et p , on a :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad (a^n)^p = a^{n \times p} \quad a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Exemple 1: $5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3 = \boxed{10^3 = 1000}$.

Exemple 2: Mettre sous la forme d'une seule puissance puis calculer sous la forme d'une fraction irréductible

$$A = 5^3 \times 2^{-3} = 5^3 \times (2^{-1})^3 = (5 \times 2^{-1})^3$$

$$\boxed{A = \left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

$$\boxed{\text{Donc } A = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}}$$

$$B = 6^3 \times 2^2 \times 15^2 \times 5^{-2}$$

$$B = (2 \times 3)^3 \times 2^2 \times (3 \times 5)^2 \times 5^{-2}$$

$$B = 2^3 \times 3^3 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^{-2}$$

$$B = 2^3 \times 2^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 5^{-2}$$

$$B = 2^{3+2} \times 3^{3+2} \times 5^{2-2}$$

$$B = 2^5 \times 3^5 \times 5^0$$

$$B = (2 \times 3)^5 \times 1$$

$$\boxed{B = 6^5 = 7776}$$

On décompose chaque nombre en produit de nombres simples.

On utilise les formules, ici la formule 3, puissance d'un produit.

On regroupe les puissances d'un même nombre ensemble.

On utilise les formules, ici la formule 1, puissances d'un même nombre.

On simplifie et on calcule chaque terme.

On utilise de nouveau la formule sur les puissances d'un produit,

mais dans l'autre sens.